BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2005

УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ВОЛНОВОГО ФРОНТА ПРИ РЕЛАКСАЦИОННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Т.М.АСКЕРОВ
Бакинский Государственный Университет

Построен линейный оператор, описывающий фильтрацию слабосжимаемой жидкости в изотропно линейно-наследственной среде с учетом релаксации скорости и давления. Найдено условие существования волнового фронта, возникающего при мгновенной работе источника в пласте. Получена формула для определения предельной скорости фронта возмущения.

В литературе предложены различные простые математические модели релаксации фильтрации и решены конкретные практические задачи [1-3]. Однако в данной работе выделены характеристики задачи, отвечающие за конечную скорость возмущений.

Пусть в первоначальном невозмущенном бесконечном пласте в момент времени $t = 0$ на некоторой поверхности внутри пласта мгновенно возникает возмущение. Рассмотрим лишь одномерные фильтрационные течения, а именно, прямолинейно-параллельные. На бесконечности $(x \to \pm\infty)$ выполнены условия покоя, т.е. давление, пористость и плотность постоянны и равны начальным значениям (при $t = 0$). Они помечены индексом нуль.

1. В основу рассматриваемого фильтрационного течения положим известный закон сохранения массы, записываемый следующей формулой [4, 5]:

$$\frac{\partial(m\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial x} = f(x,t). \qquad (1.1)$$

Здесь m – коэффициент пористости, ρ – плотность жидкости, w – скорость фильтрации. Соотношение (1.1) справедливо при присутствии внутри пласта источников (стоков). Очевидно, произведение $m\rho$ характеризует массу жидкости в единичном объеме, а $f(x,t)$ – расход массы жидкости через источников в единичном времени.

В качестве определяющего соотношения, связывающего скорость фильтрации w с градиентом давления, возьмем линейную релаксационную модель вида [5]:

$$w = -\frac{k_0}{\mu_0}\int_{-\infty}^{t} H(t-\tau)\frac{\partial P(\tau,x)}{\partial x}d\tau,$$

$$P_1 = p - p_0\,. \qquad (1.2)$$

Коэффициент проницаемости пласта предполагаем постоянным, а пористость – релаксационно-деформируемой [3]:

$$m = m_0 + \alpha_m \int_{-\infty}^{t} E(t-\tau)P(\tau,x)d\tau\,. \qquad (1.3)$$

Примем, что жидкость является слабосжимаемой

$$\rho = \rho_0[1+\alpha_\rho P], \qquad (1.4)$$

где k_0 – «равновесный» постоянный коэффициент скорости проницаемости, μ_0 – коэффициент вязкости, α_m – скорость коэффициента сжимаемости пористой среды, α_ρ – коэффициент сжимаемости жидкости, $\Phi(t)$ – ядро релаксации для скорости фильтрации, $E(t)$ – ядро релаксации для пористости.

Из (1.2)-(1.4) следует, что определяющие соотношения для $m\rho$ и ρw с высокой точностью можно записать в виде:

$$\begin{aligned} m\rho &\approx m_0\rho_0 + m_0\rho_0\alpha_\rho P + \rho_0\alpha_m \int_{-\infty}^{t} E(t-\tau)P(\tau,x)d\tau, \\ \rho w &= -\frac{\rho_0 k_0}{\mu_0}\int_{-\infty}^{t}\Phi(t-\tau)\frac{\partial P}{\partial x}d\tau. \end{aligned} \qquad (1.5)$$

Подставляя (1.5) в (1.1), получаем уравнение линейно-релаксационной фильтрации в насыщенной пористых средах с памятью:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(m_0\alpha_\rho P + \alpha_m\int_{-\infty}^{t}E(t-\tau)P(\tau,x)d\tau\right) - \frac{k_0}{\mu_0}\int_{-\infty}^{t}\Phi(t-\tau)\frac{\partial P(\tau,x)}{\partial x^2}d\tau = \frac{f(x,t)}{\rho_0}. \qquad (1.6)$$

Решение уравнения (1.6) при однородных граничных условиях можно построить с помощью функции Грина [6, 7]. Функция Грина, которая по сути дела является решением краевой задачи с однородными граничными условиями для мгновенного единичного источника, приложенного в точке $x=0,\ t=0$, находится из уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(m_0\alpha_\rho P + \alpha_m\int_{-\infty}^{t}E(t-\tau)P(\tau,x)d\tau\right) - \int_{-\infty}^{t}H(t-\tau)\frac{\partial^2 P(\tau,x)}{\partial x^2}d\tau = \delta(x)\delta(t), \qquad (1.7)$$

где δ – дельта-функция Дирака, $[\delta(x)\delta(t)] = 1/\textit{сек}$, $H(t) = (k_0/\mu_0)\Phi(t)$.

Известно, что решение уравнения (1.6) находится в виде свертки. Однако фундаментальное решение $P(t,x)$ должно быть физически осмысленным, т.е. описывать распространение возможных возмущений с конечной скоростью от мгновенно действующего точечного источника. Поэтому возникает вопрос: обладает ли оператор (1.7) таким фундаментальным решением?

2. Применим к уравнению (1.7) преобразование Фурье по x и t:

$$[(m_0\alpha_\rho + \alpha_m\overline{E}(\omega))i\omega + k^2\overline{H}(\omega)]P(\omega,k) = 1, \qquad (2.1)$$

где

$$P(\omega,k) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} P(x,t)e^{-i(kx+\omega t)}dxdt, \;\; \overline{E}(\omega) = \int_0^\infty e^{-i\omega t}E(t)dt,$$

$$\overline{H}(\omega) = \int_0^\infty e^{-i\omega t}H(t)dt, \quad \mathrm{Im}\,\omega > 0.$$

Отсюда

$$P(\omega,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{k^2\overline{H}(\omega) + (m_0\alpha_\rho + \alpha_m\overline{E}(\omega))i\omega}dk. \qquad (2.2)$$

Теперь налагаем на ядра $E(t)$ и $H(t)$ такие условия, при которых возмущения от мгновенного точечного источника с единичным дебитом распространяются с конечной скоростью. Согласно определению ядер при $t<0$ $E(t)\equiv 0$, $H(t)\equiv 0$, $P(t,x)\equiv 0$, а при $t\geq 0$ эти функции ограничены.

Предположим, что при $t = x/V$ $P(t,x)\equiv 0$, т.е. порождения сейсмических волн, где V – максимальная скорость распространения возмущения в пласте, не влияют на релаксационные параметры задачи.

В этих допущениях и по теореме Пэли-Винера [6,7] функции $\overline{H}(\omega)$ и $\overline{E}(\omega)$ являются голоморфными в области $\mathrm{Im}\,\omega < 0$ и непрерывны вплоть до границы этой области: $\mathrm{Im}\,\omega = 0$. Чтобы не противоречить утверждению указанной теоремы, потребуем непрерывность функции $P(\omega,x)$. Учитывая симметричность задачи относительно точки $x = 0$, исследуем интеграл (2.2) в области $x > 0$

$$P(\omega,x) = \frac{ie^{ik_1(\omega)x}}{2k_1(\omega)\overline{H}(\omega)}, \qquad (2.3)$$

где

$$k_{1,2} = \pm\left(-\frac{i\omega}{K(\omega)}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad K(\omega) = \frac{\overline{H}(\omega)}{m_0\alpha_\rho + \alpha_m\overline{E}(\omega)}. \qquad (2.4)$$

В (2.3) выбран тот корень уравнения (2.4) (например k_1), который удовлетворяет условию $\mathrm{Im}\,k_1(\omega) > 0$.

Отметим, что в области $\mathrm{Im}\,\omega < 0$ $k_1(\omega)$ не может принимать действительные значения. Если $k_1(\omega)$ принимает действительные значения, то функция этой области $P(\omega,x)$ терпит разрыв [6, 7]. Поэтому исключаем этот случай. При действительных значениях $k_1(\omega)$ из (2.4) получаем:

$$\overline{K}(\omega) = -i\omega / k_1^2(\omega), \quad \operatorname{Re}\overline{K}(\omega) = \operatorname{Im}\omega / k_1^2 < 0 . \qquad (2.5)$$

Естественно исключаем условие (2.5) и требуем, что

$$\operatorname{Re}\overline{K}(\omega) > 0 \text{ при } \operatorname{Im}\omega = 0 . \qquad (2.6)$$

Условие (2.6) можно предположить во всей нижней плоскости $\operatorname{Im}\omega < 0$, где функция $P(\omega, x)$ голоморфна. Далее, построим такую функцию

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{Im}\omega / \operatorname{Im}k_1(\omega) \qquad (2.7)$$

и потребуем от неё, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{r\to\infty}(\inf\varphi(\omega)) \le V, \quad |\omega| > r . \qquad (2.8)$$

Если подставить (2.4) в (2.8) и использовать предельную теорему о начальном значении в преобразовании по времени, то получим:

$$c = \lim_{r\to\infty, |\omega|>r} \inf\varphi(\omega) = \sqrt{K(0)} \qquad (2.9)$$

или

$$c^2 = K(0), \qquad (2.10)$$

где

$$K(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{H}(\omega)d\omega}{m_0\alpha_\rho + \alpha_m\overline{E}(\omega)} \le V^2 . \qquad (2.11)$$

Если слабосжимаемая жидкость релаксационно фильтрируется в недеформируемой изотропной пористой среде, $E(t) \equiv 0$, тогда (2.11) упрощается:

$$K(0) = \frac{1}{2\pi m_0\alpha_\rho}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{H}(\omega)d\omega .$$

Приведем решение некоторых конкретных задач.

1. Если взять функции $\Phi(t) = E(t) = \delta(t)$, $\overline{H}(\omega) = k_0 / \mu_0$, $\overline{E}(\omega) = 1$, то уравнение (1.7) перейдет в уравнение пьезопроводности и предельная скорость распространения возмущения (2.10) при упругой фильтрации будет стремится к бесконечности: $c \to \infty$.

2. Рассмотрим фильтрацию однородной слабосжимаемой жидкости в вязкоупругой среде при релаксационной фильтрации [3, 5], т.е. $\Phi(t) = e^{-t/t_f}$, $E(t) = e^{-t/\tau_m}$. После применения к этим функциям преобразования Фурье, подставим их в (2.11). По основной теореме теории вычетов вычислим следующий интеграл:

$$K(0) = \frac{k_0\tau_f}{\mu_0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1+i\omega\tau_m)d\omega}{(1+i\omega\tau_f)(m_0\alpha_\rho + \alpha_m\tau_m + m_0\alpha_\rho\tau_m i\omega)} = \frac{k_0}{\mu m_0\alpha_\rho} . \qquad (2.12)$$

Проведем расчеты при следующих данных:

$$k_0 = 3\cdot10^{-13} м^{-2}, \; \mu_0 = 3\cdot10^{3} Пас, \; \alpha_\rho = 5\cdot10^{-10} Па^{-1},$$

$$m_0 = 0{,}2\,,\; c^2 = \frac{k_0}{\mu_0 m_0 \alpha_p} = 1\,\frac{м^2}{сек}\,,\; c = 1\,\frac{м}{сек}\,.$$

Таким образом, предельная скорость возмущения при фильтрации слабосжимаемой жидкости в насыщенной пористой среде определяет ее гидродинамические параметры и коэффициент сжимаемости жидкости; здесь рост релаксационного возмущения значительно меньше, чем значения сейсмических волн.

Автор выражает благодарность проф. Рамазанову Т.К. за постановку задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абасов М.Т., Джалилов К.Н., Керимов З.А., Мирзоева Д.Р. О фильтрации жидкости релаксационно-сжимаемом и ползучем пласте при релаксации скорости и давления. Известия АН Азербайджана, Серия наука о Земле, 2000, №2, с.25-38.
2. Алишаева М.Г., Мирзаджанзаде А.Х. К учету явлений запаздывания в теории фильтрации. Известия ВУЗов СССР, Нефть и газ, 1975, №6, с.71-74.
3. Рамазанов Т.К. Фильтрация флюида в линейно-наследственном насыщенном пласте. Сборник научных трудов, Особенности освоения месторождений прикаспийской впадины, ВНИИГАЗ, Москва, 1986, с.18-27.
4. Николаевский К.Н. Геомеханика и флюидодинамика. М., Недра, 1996, 447с.
5. Молокович Ю.М., Осипов П.П., Шарафутдинов В.Ф. О скачках при фильтрации, описываемой линейными релаксационными моделями. В кн. «Исследования по подземной гидродинамике». Изд. Казанского Университета, 1983,с.88-96.
6. Локшин А.А., Суворова Ю.В. Математическая теория распространения волн в средах с памятью. Издат. Московского Университета, 1982, 151с.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М., Издат. Наука, 1978, 832с.

RELAKSASİYALI SÜZÜLMƏ ZAMANI DALĞA CƏBHƏSİNİN VARLIQ ŞƏRTLƏRİ

T.M.ƏSGƏROV

ANNOTASİYA

Məqalədə süzülmə sürətinin və təzyiqin relaksasiyası nəzərə alınmaqla izotrop xətti-irsi məsaməli mühitlərdə zəif sıxılan mayenin süzülməsini təsvir edən xətti-diferensial operator qurulmuşdur. Layda mənbənin ani həyəcanlanması zamanı yaranan dalğa cəbhəsinin varlığı üçün zəruri şərtlər tapılmış və cəbhənin yayılmasının limit sürəti üçün formul alınmışdır.

THE CONDITION OF THE EXISTENCE OF THE WAVE FRONT FOR RELAXATIONAL FILTRATION

T.M.ASKEROV

ABSTRACT

Linear operator, describing the filtration of weakly compressible fluid on isotropically linear-hereditary medium with taking into account the relaxation of the velocity and pressure is constructed. The condition of the existence of the wave front, arising for instantaneous work of the source in layer is found. The formula for determining the limit velocity of the front of perturbation is obtained.